

ANALYTISKA FUNKTIONER

DEMONSTRATIONSUPPGIFTER TILL DEN 1.10.2009

1. (a) Härled L'Hospital's regel: Om $f(z)$ och $g(z)$ är deriverbara i punkten z_0 där $f(z_0) = g(z_0) = 0$ och $g'(z_0) \neq 0$, så gäller

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(b) Bestäm $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1+z^6}{1+z^{10}}.$

2. Låt $f(z) = z^3 + 1$ och $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $z_2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$. Visa att det inte finns någon punkt ω på sträckan mellan z_1 och z_2 sådan att $f(z_1) - f(z_2) = f'(\omega)(z_1 - z_2)$.

3. Undersök i vilka punkter av z -planet funktionen $f(z) = 2x^3y + 3x^2y^2 - y^3 + i3xy^2$, $z = x+iy$, är (a) deriverbar (b) analytisk

4. Definiera funktionen f genom

$$f(z) = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + i(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)}{(x^2 + y^2)^2}, z \neq 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Visa att Cauchy - Riemanns differentialekvationer satisfieras i punkten $z = 0$ och att f saknar derivata i punkten.

5. En analytisk funktion är av formen $f(z) = u(x) + i v(y)$, där u och v är reella funktioner och $z = x + iy$. Bestäm f som funktion av z .

6. Låt M vara ett område. Antag att f och $\bar{f}$ är analytiska funktioner i M . Visa att f är konstant i M .